Практическое занятие
Вычисление пределов

При вычислении предела функции $y = f(x)$ приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

1. Функция $f(x)$ является элементарной и предельное значение аргумента функции принадлежит её области определения, тогда вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, так как предел элементарной функции $f(x)$ при $x \to x_0$, где x_0 входит в область её определения, равен частному значению функции при $x = x_0$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ не определена, или же вычисляется предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$.

Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода. В одних случаях вопрос сводится непосредственно к применению теорем о пределах, свойствах бесконечно малых и бесконечно больших функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ или при $x \to \infty$ представляет собой неопределённость типа «$\dfrac{0}{0}$»; «$\dfrac{\infty}{\infty}$»; «$0 \cdot \infty$»; «$\infty - \infty$»; «1^{∞}»; «0^0»; «∞^0».

Решение типовых примеров

Задача 1. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x \to 2}\left(x^2 + 1\right) = 5 \neq 0$, то применим теорему о пределе частного:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = \frac{4 + 2 - 2}{4 + 1} = \frac{4}{5}.$$

2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 5x - 3}{loq_2\left(x^2 + 1\right)}$.

Решение.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 5x - 3}{loq_2\left(x^2 + 1\right)} = \frac{(-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 3}{loq_2\left[(-1)^2 + 1\right]} = \frac{-7}{loq_2 2} = -7$$

3. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right) \cdot \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)\right]$.

Решение.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=-\cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$.

Решение. Функция $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ в точке $x=2$ не определена. Так как при $x=2$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то имеем неопределенность вида «$\dfrac{0}{0}$». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было бы сократить на $x-2$. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители:

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, так как $x^2-5x+6=0$ при $x_1=2$, $x_2=3$.

$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$, так как $x^2-3x+2=0$ при $x_1=2$, $x_2=1$.

Итак, имеем:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1}=\frac{2-3}{2-1}=-1.$$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{x-3}$.

Решение. При $x=3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, следовательно, имеем неопределенность «$\dfrac{0}{0}$». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было сократить на $x-3$. Для этого числитель и знаменатель умножим на выражение, сопряженное иррациональному выражению $3-\sqrt{x+6}$, то есть на выражение $3+\sqrt{x+6}$, получим

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(3-\sqrt{x+6}\right)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=$ {перемножив сопряженные выражения, избавимся от иррациональности в числителе} $=$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{9-(x+6)}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=-\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}=-\frac{1}{3+\sqrt{3+6}}=-\frac{1}{3+3}=-\frac{1}{6}.$$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-4}$.

Решение.

$$\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{x+6}-2\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{x+6-4}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+6}+2\right)}=\frac{1}{-4\left(\sqrt{4}+2\right)}=-\frac{1}{4(2+2)}=-\frac{1}{16}.$$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1-2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x+3-4)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+3}+2}{\sqrt{1+1}+\sqrt{2}}=\frac{2+2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+1}{3x^2+2x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x^3+1\right)=\infty;\quad \lim_{x\to\infty}\left(3x^2+2x-1\right)=\infty$$

Следовательно, имеет место неопределенность вида «$\dfrac{\infty}{\infty}$». Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на старшую степень дроби, то есть на x^3, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{3x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=\infty.$$

Предел знаменателя равен нулю, следовательно, в знаменателе бесконечно малая функция. Далее применили теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Решение. В заданном примере имеем неопределенность вида «$\infty-\infty$». Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение, то есть на $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)=\infty$, значит в знаменателе бесконечно большая функция. Далее применим теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой величинами.

10. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{2}{9-x^2}\right)$.

Решение. Имеем неопределенность вида «$\infty-\infty$». Приведем дроби, стоящие под знаком предела, к общему знаменателю, получим:

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{3-x}-\frac{2}{9-x^2}\right)=\lim_{x\to3}\frac{3+x-2}{9-x^2}=\lim_{x\to3}\frac{1+x}{9-x^2}=\infty.$$

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

Решение. Для вычисления этого предела воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot1=5.$$

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{x\cdot x}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=$$

$$=2\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=2\left(\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2=8\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=8\cdot1=8$$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$.

Решение. В данном примере имеем неопределенность вида « 1^{∞}». Для его вычисления используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{6}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{6}=e^{6}.$$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 4x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{tg 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\cos 4x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 4x=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}\cdot\cos 0=\frac{3}{4}\cdot 1=\frac{3}{4}.$$

При вычислении этого предела воспользовались эквивалентностью бесконечно малых $\sin x\sim x$ при $x\to 0$. Следовательно, $\sin 3x\sim 3x$ и $\sin 4x\sim 4x$ при $x\to 0$. Затем бесконечно малые функции в числителе и в знаменателе заменили эквивалентными им функциями.

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}+2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида « 1^{∞}». Для вычисления предела используем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}+2}=\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}\cdot(1-5x)^{2}=$

$$=\lim_{x\to 0}(1-5x)^{-\frac{1}{5x}\cdot(-5)}\cdot 1=\left[\lim_{x\to 0}(1-5x)^{-\frac{1}{5x}}\right]^{-5}=e^{-5}.$$

Вычислить односторонние пределы:

16. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{4}{(x-2)^{3}}$.

Решение. Пусть $x<2$, тогда при $x\to 2-0$ функции $x-2$ и $(x-2)^{3}$ являются отрицательными бесконечно малыми, поэтому $\dfrac{4}{(x-2)^{3}}$ – отрицательная бесконечно большая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{4}{(x-2)^{3}}=-\infty.$$

При $x>2$ функции $x-2$ и $\left(x-2\right)^3$ – положительные бесконечно малые, поэтому $\frac{4}{\left(x-2\right)^3}$ – положительная бесконечно большая функция.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 2+0}\frac{4}{\left(x-2\right)^3}=+\infty$.

17. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

Решение. При $x\to 1-0$ функция $x-1$ – отрицательная бесконечно малая, следовательно $\frac{1}{x-1}$ – отрицательная бесконечно большая функция.

Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно малая функция.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1.$$

При $x\to 1+0$ функция $x-1$ – положительная бесконечно малая, следовательно, $\frac{1}{x-1}$ – положительная бесконечно большая функция. Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно большая положительная функция. Таким образом,

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=0.$$

Задания для решения

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-8x-3}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2-x}{x^2+10}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3-5x+2}{x+10^{10}}$.

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3+3x^2+5x-6}{3x^2+7x-x^3-1}$.